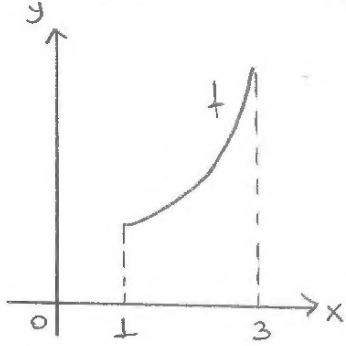


4) $f: [1,3] \rightarrow [2,10]$

$f(x) = 1+x^2$

Fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



$[1,3]$ aralığı eşit uzunlukta iki alt aralığa bölünüp bu alt aralıkların sağ uç noktaları x_1 ve x_2 olarak işaretleniyor. Daha sonra her bir alt aralığı taban kabul eden ve yükseklikleri sırasıyla $f(x_1)$, $f(x_2)$ birim alan iki dikdörtgen çiziliyor.

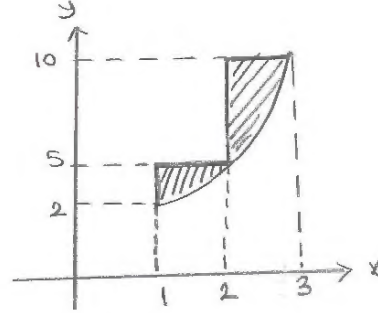
Bu dikdörtgenlerin alanları toplamı A ve f fonksiyonu ile x -ekseni arasında kalan bölgenin alanı B ise $A-B$ farkı kaç birim karedir?

2013-LYS

Çözüm:



$[1,3]$ aralığı eşit uzunlukta iki alt gruba ayrılıp sağ uç noktalar x_1 ve x_2 olursa, $x_1=2$ ve $x_2=3$ olarak bulunur.



$f(x) = 1+x^2$
 $f(2) = 5$

Dikdörtgenlerin alanından eğrinin altında kalan bölgenin alanı çıkarılırsa taralı bölgeler kalır.

$A = 1.5 + 1.10 = 15$ (dikdörtgenlerin alanı)

$B = \int_1^3 (1+x^2).dx = x + \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = (3+9) - (1+\frac{1}{3})$

$B = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$

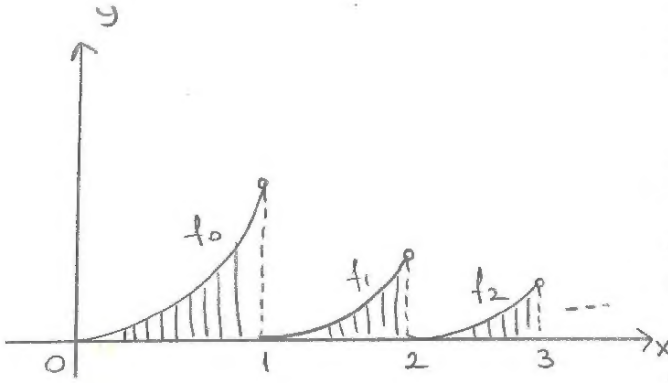
$A-B = 15 - \frac{32}{3} = \frac{13}{3}$

5) n bir doğal sayı olmak üzere,

$$f_n: [n, n+1) \rightarrow \left[0, \frac{1}{2^n}\right]$$

$$f_n(x) = \frac{(x-n)^2}{2^n}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar ile x -ekseni arasında kalan bölgeler aşağıdaki şekilde taralı olarak verilmiştir.



Buna göre tüm taralı bölgelerin alanları toplamı kaç birim karedir?

#2013-LYS#

6) Analitik düzlemde, x -eksenini $x+y=2$ doğrusu ve $y=\sqrt{x}$ eğrisi arasında kalan sınırlı bölge x -ekseni etrafında 360° döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

#2013-LYS#

Cözüm:

$$f_0(x) = \frac{(x-0)^2}{2^0} = x^2$$

$$f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{2^1}$$

$$f_2(x) = \frac{(x-2)^2}{2^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Toplam Alan} &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{(x-1)^2}{2} dx + \int_2^3 \frac{(x-2)^2}{2^2} dx + \dots \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{(x-1)^3}{6} \Big|_1^2 + \frac{(x-2)^3}{12} \Big|_2^3 + \dots \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{1}{6} - 0\right) + \left(\frac{1}{12} - 0\right) + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots \end{aligned}$$

Bu bir seri açılımıdır.

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Serinin} & \quad a_1 = \frac{1}{3} \\ \text{Toplamı} & \quad \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

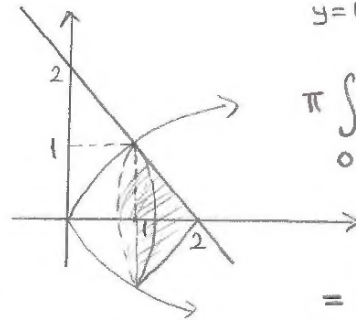
Cözüm:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$$

$x+y=2$, $y^2=x$ ortak çözüm yapılırsa

$$y^2+y=2, \quad y(y+1)=2, \quad y=1 \text{ veya } y=-2$$

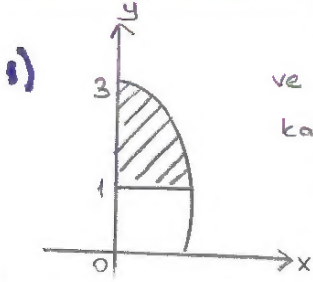
$$y=1 \text{ için } x=1 \quad (1,1)$$



$$\begin{aligned} & \pi \int_0^1 y^2 dx + \underbrace{\frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3}}_{\text{koninin hacmi?}} \\ &= \pi \int_0^1 x dx + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

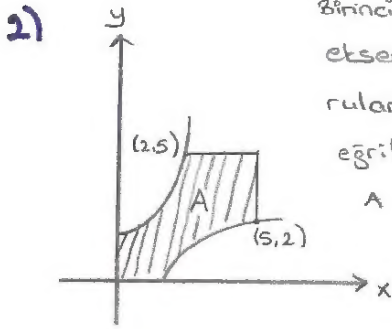
$$= \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

2012-LYS SORULARI



Birinci bölgede, $y=1$ doğrusu ve $9x^2 + y^2 = 9$ elipsi arasında kalan bölge y -ekseni etrafında 360° döndürülürse oluşan dönel cismin hacmi kaçtır?

#2012-LYS#



Birinci bölgede koordinat eksenleri, $x=5$, $y=5$ doğruları ve $y=x^2+1$, $x=y^2+1$ eğrileri arasında kalan A bölgesinin alanı kaç birim karedir?

#2012-LYS#

3) $\int (\arcsin x)^2 dx$ integralinde $u = \arcsin x$ dönüşümü yapıldığında hangi integral elde edilir?

#2012-LYS#

4) $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int 2 dx$ veriliyor.

$f(0) = \frac{1}{2}$ ise $f(3)$ kaçtır?

#2012-LYS#

Cözüm:

$$9x^2 = 9 - y^2, \quad x^2 = 1 - \frac{y^2}{9}$$

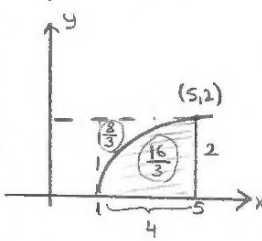
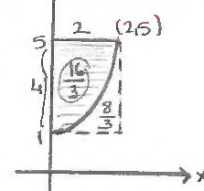
(integral y -eks. üzerinde alınacağından kullanılacak formül:

$$\pi \int_1^3 f^2(y) dy \rightarrow x^2 = f^2(y) \text{ dir.}$$

$$\pi \int_1^3 \left(1 - \frac{y^2}{9}\right) dy = \pi \left(y - \frac{y^3}{27}\right) \Big|_1^3$$

$$\pi \left[\left(3 - 1\right) - \left(1 - \frac{1}{27}\right) \right] = \pi \left(2 - \frac{26}{27}\right) = \frac{28}{27} \pi$$

Cözüm:



$$A + \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = 25$$

$$A + \frac{32}{3} = 25, \quad A = \frac{43}{3}$$

Cözüm:

$$\arcsin x = u, \quad x = \sin u$$

$$dx = \cos u du$$

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \int u^2 \cos u du$$

Cözüm: $f(x) = u$ ise $f'(x) dx = du$

$$\int \frac{du}{u^2} = 2x + C_1, \quad \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1} + C_2 = -\frac{1}{f(x)} + C_2$$

$$-\frac{1}{f(x)} + C_2 = 2x + C_1 \text{ için,}$$

$$x=0 \text{ ise } -\frac{1}{f(0)} + C_2 = C_1, \quad -\frac{1}{2} = C_1 - C_2 = -2$$

$$x=3 \text{ ise } -\frac{1}{f(3)} + C_2 = 6 + C_1, \quad -\frac{1}{f(3)} = 6 + \frac{C_1 - C_2}{-2} = 4$$

$$f(3) = -\frac{1}{4}$$

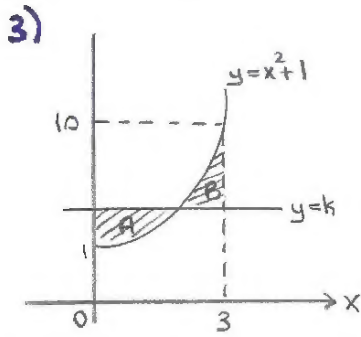
2011-LYS - integral Soruları

1) $\int_1^e \ln^3 x \cdot dx = 6 - 2e$ ise $\int_1^e \ln^4 x \cdot dx$ kaçtır?

2011-LYS#

2) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx$ integralinde $u = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

2011-LYS#



A ve B alanları eşit ise k kaçtır?

2011-LYS#

4) Bir f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki teğetinin eğimi 1, $x=b$ noktasındaki teğetinin eğimi ise $\sqrt{3}$ tür.

$f''(x)$ ikinci türev fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise,

$\int_a^b f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx$ kaçtır?

2011-LYS#

5) $f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f(0) = 2$

olduğuna göre $f(-1)$ kaçtır?

2011-LYS#

Çözüm: $\ln^4 x = u$, $4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = du$

$dx = dv$, $x = v$

$$\int_1^e \ln^4 x \cdot dx = x \cdot \ln^4 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= (e \cdot \ln^4 e) - (1 \cdot \ln^4 1) - 4 \int_1^e \ln^3 x \cdot dx$$

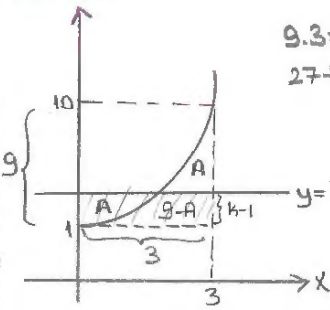
$$= e - 4(6 - 2e) = e - 24 + 8e = 9e - 24$$

Çözüm: $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot dx$, $du \cdot \frac{2\sqrt{x}}{1} = dx$

$dx = 2u \cdot du$

$$\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \frac{\ln u}{u} \cdot 2u \cdot du = \int 2 \ln u \cdot du$$

Çözüm:



$9 \cdot 3 = 27$
 $27 \div 3 = 9$

Not:



parabolü saran dikdörtgen

$(k-1) \cdot 3 = 9 - A$
 $3k - 3 = 9$, $3k = 12$
 $k = 4$

Çözüm: $f'(a) = 1$, $f'(b) = \sqrt{3}$ verilmiş

$\int_a^b f'(x) \cdot f''(x) \cdot dx$ ifadesinde,

$f'(x) = u$ ise $f''(x) \cdot dx = du$

$$\int u \cdot du = \frac{u^2}{2} = \frac{[f'(x)]^2}{2} \Big|_a^b = \frac{[f'(a)]^2}{2} - \frac{[f'(b)]^2}{2}$$

$$= \frac{1^2}{2} - \frac{\sqrt{3}^2}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Çözüm: $f'(x)$ fonksiyonunun integrali,

$f(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x + C = x^3 + 2x^2 + 3x + C$

$f(0) = C$, $f(0) = 2$ olduğundan $C = 2$

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

$f(-1) = -1 + 2 - 3 + 2 = 0$

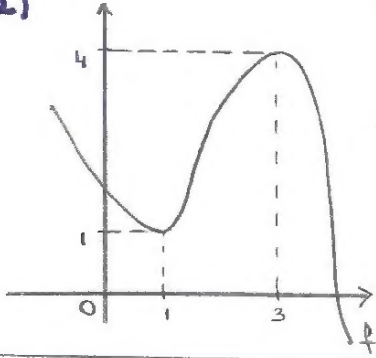
2010-LYS integral Soruları:

1) $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x < 2 \\ 2x-3, & x \geq 2 \end{cases}$ ise

$\int_1^3 f(x+1) \cdot dx$ integralinin değeri kaçtır?

#2010-LYS#

2)



f fonksiyonu için

$$\int_1^3 \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \cdot dx$$

kaçtır?

#2010-LYS#

3) $y=x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğrusu ile sınırlı (sınırlı) bölgenin alanı kaçtır?

#2010-LYS#

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot dx$ integralinin değeri kaçtır?

#2010-LYS#

5) $f''(x) = 6x - 2$

$f'(0) = 4$

$f(0) = 1$

kosullarını sağlayan f fonksiyonu için f(1) değeri kaçtır?

#2010-LYS#

Çözüm: $f(x+1)$ için $f(x)$ te x yerine $x+1$ yazalım.

$$f(x+1) = \begin{cases} 3-(x+1), & (x+1) < 2 \\ 2(x+1)-3, & (x+1) \geq 2 \end{cases}$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 2-x, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

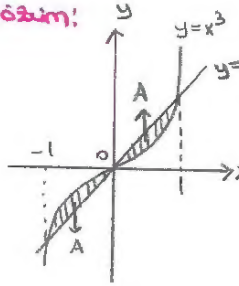
$$\int_1^3 f(x+1) \cdot dx = \int_1^3 (2x-1) \cdot dx = \left. \frac{2x^2}{2} - x \right|_1^3 = (9-3) - (1-1) = 6-0 = 6$$

Çözüm:

$$\int_1^3 \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} \cdot dx = \left. \frac{f(x)}{x} \right|_1^3$$

$$= \frac{f(3)}{3} - \frac{f(1)}{1} = \frac{4}{3} - \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$$

Çözüm:



$$A = \int_0^1 (x-x^3) \cdot dx = \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right|_0^1$$

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Taralı Alan} = 2A = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Çözüm: $\cos x = u$, $-\sin x \cdot dx = du$

$x=0$ için $u=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ için $u=\frac{1}{2}$

$$\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2} = \left. \frac{u^{-1}}{-1} \right|_1^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{u} \Big|_1^{\frac{1}{2}} = -1 - (-2) = 1$$

Çözüm: $f'(x) = \frac{6x^2}{2} - 2x + C_1 = 3x^2 - 2x + C_1$

$f'(0) = C_1$, $f'(0) = 4 \Rightarrow C_1 = 4$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 4$

$f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + C_2$, $f(0) = C_2$, $f(0) = 1$

$f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$

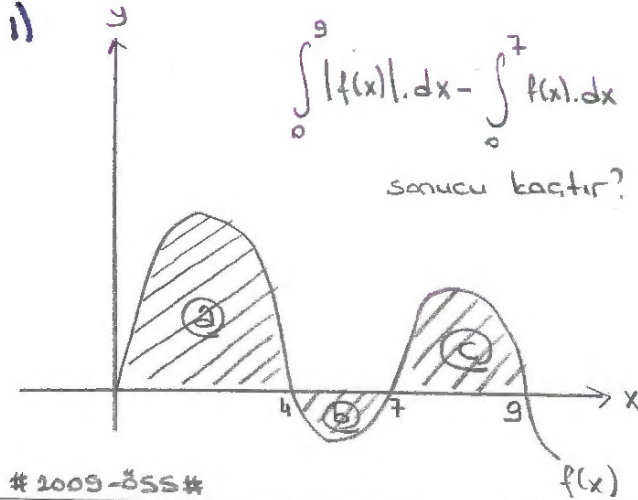
$f(1) = 1 - 1 + 4 + 1 = 5$

6) $\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} \cdot dx$ integralinin değeri kaçtır?

#2010-LYS#

Cözüm:
 $\sqrt{2x+1} = u$, $2x+1 = u^2$, $2x = u^2 - 1 \Rightarrow 6x = 3u^2 - 3$
 $2dx = 2u \cdot du$
 $x=0$ için $u=1$
 $x=4$ için $u=3$
 $\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{2x+1}} \cdot dx = \int_1^3 \frac{3u^2-3}{u} \cdot u \cdot du = \frac{3u^3}{3} - 3u \Big|_1^3$
 $= (27-9) - (1-3) = 18 - -2 = 20$

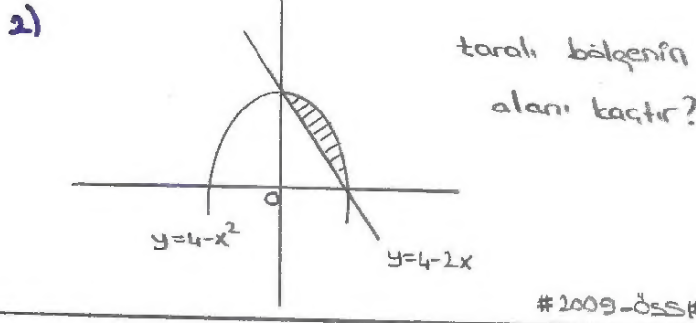
2009-ÖSS integral soruları



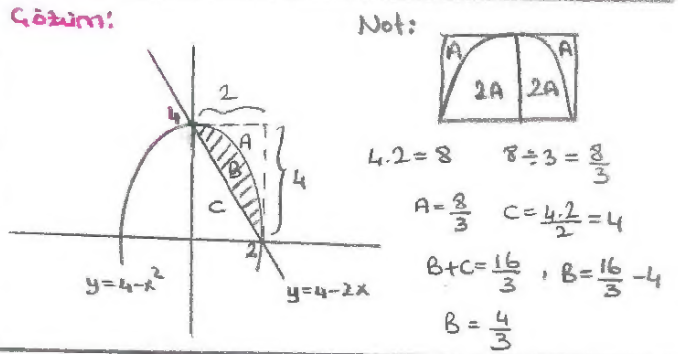
www.ozelogrenci.com

Cözüm:
 $\int_0^9 |f(x)| \cdot dx = |a| + |b| + |c| = a + b + c$
 $\int_0^7 f(x) \cdot dx = a - b$
 $\int_0^9 |f(x)| \cdot dx - \int_0^7 f(x) \cdot dx$
 $= (a + b + c) - (a - b) = 2b + c$

Not: Altta kalan bölgelerin alanı integralle bulunurken işaret olarak önüne "-" alır.



www.ozelogrenci.com



3) $\int_0^1 (x+1) \cdot e^x \cdot dx$ integralinin değeri kaçtır?

#2009-ÖSS#

www.ozelogrenci.com

Cözüm:

Türev	Integral
$(x+1)$	e^x
1	e^x
0	e^x

$\rightarrow + (x+1) \cdot e^x$
 $\rightarrow - 1 \cdot e^x$

$\int_0^1 (x+1) \cdot e^x \cdot dx = (x+1) \cdot e^x - e^x \Big|_0^1 = x e^x + e^x - e^x \Big|_0^1$
 $(1 \cdot e^1) - (0 \cdot e^0) = e$

2008-ÖSS integral Soruları:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| \cdot dx$ integralinin değeri kaçtır?

2008-ÖSS

2) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ integralinin değeri kaçtır?

2008-ÖSS

3) $b > 0$ olduğuna göre,

$\int_0^b (2x - x^2) \cdot dx$ integralinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

2008-ÖSS

Çözüm: $\sin x - \frac{1}{2} = 0$ için $x = \frac{\pi}{6}$ kritik noktadır.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| \cdot dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-\sin x + \frac{1}{2} \right) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \cdot dx \\ &= \left(\cos x + \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\cos x - \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \right) - (1 + 0) + \left(0 - \frac{\pi}{4} \right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} - 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Çözüm: $\ln x = u$, $\frac{1}{x} \cdot dx = du$

$x = e$ ise $u = 1$, $x = e^2$ ise $u = 2$

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \int_1^2 u^{-2} \cdot du = \frac{u^{-1}}{-1} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{1}{u} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Çözüm:

$$\int_0^b (2x - x^2) \cdot dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{b^2 - \frac{b^3}{3}}{1}$$

ifadesinin en büyük değerini sağlayan b 'yi bulmak için türevi alıp sıfıra eşitleyelim.

$$\left(b^2 - \frac{b^3}{3} \right)' = 2b - \frac{3b^2}{3} = 0 \quad b(2 - b) = 0$$

$b = 0$ veya $b = 2$, $b > 0$ old. $b = 2$ alınır.

$$b^2 - \frac{b^3}{3} = 2^2 - \frac{2^3}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

2007-ÖSS integral Soruları:

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$ integralinin değeri kaçtır?
2007-ÖSS#

2) $\int_0^1 3x \sqrt{3+x^2} dx$ integralinin değeri kaçtır?
2007-ÖSS#

3) $x^2=2y$, $y^2=2x$ eğrileriyle sınırlı kalan bölgenin alanı kaçtır.
2007-ÖSS#

Çözüm: Polinom bölmesi yapalım.

$$\begin{array}{r} x^2 \quad | \quad x+1 \\ -x+1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x-1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2 \right) - (0)$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

Çözüm:

$3+x^2=u$, $2x \cdot dx=du$, $x \cdot dx=\frac{du}{2}$

$x=0$ için $u=3$, $x=1$ için $u=4$

$$\int_3^4 3\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{3}{2} \int_3^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{3}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_3^4$$

$$= \sqrt{u^3} \Big|_3^4 = \sqrt{64} - \sqrt{27} = 8 - 3\sqrt{3}$$

Çözüm:

Pratik yol: y^2 leri eşitleyip 0 dan farklı olan x değerini herhangi bir denklemde bulduğunuz y değerini çarpıp, üçe bölün.

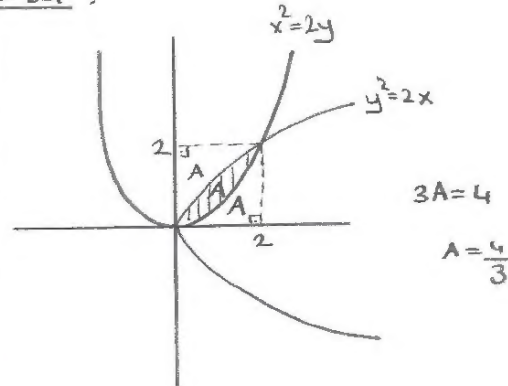
$$\begin{cases} x^2=2y \Rightarrow y=\frac{x^2}{2} \Rightarrow y^2=\frac{x^4}{4} \\ y^2=2x \Rightarrow y^2=2x \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4}{4}=2x \\ x^4=8x \end{array} \right.$$

$x=1$ için $y=2$ olur.

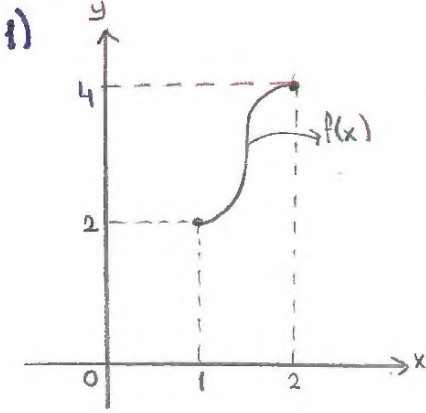
$x=0$ veya $x=2$

$\text{Alan} = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$

II. Yol :



2006-ÖSS - integral Soruları:



şekilde, bire bir
ve örten,
 $f: [1, 2] \rightarrow [2, 4]$
fonksiyonunun
tersi f^{-1} dir.
Buna göre,

$$\int_1^2 f(x).dx + \int_2^4 f^{-1}(x).dx$$

2006-ÖSS

- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her noktada
türevli ve,
 $f'(x) = x+1$
 $f(2) = -1$
olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

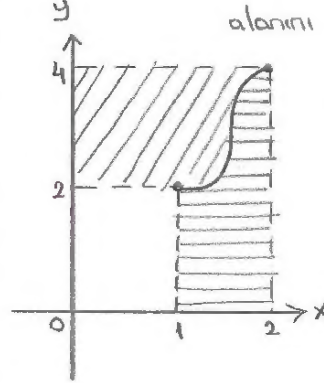
2006-ÖSS

- 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x).dx$ integralinde
 $t = \pi - x$ dönüşümü yapılırsa
hangisi integral elde edilir.

2006-ÖSS

Cözüm:
 $\int_1^2 f(x).dx$: 1 den 2 ye kadar eğri ile
x-eks. arasında kalan bölgenin
alanını gösterir.

$\int_2^4 f^{-1}(x).dx$: 2 den 4 e kadar eğri ile
y-eks. arasında kalan bölgenin
alanını gösterir.



$$T.A = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8 - 2 = 6$$

Cözüm:
 $f'(x)$ fonksiyonunun integralini alalım.

$$f'(x) = x+1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$f(2) = \frac{2^2}{2} + 2 + C = 2 + 2 + C = 4 + C$$

$$f(2) = -1, f(2) = 4 + C, -1 = 4 + C, C = -5$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 5, f(0) = -5$$

Cözüm:
 $t = \pi - x$ ise $x = \pi - t$ olur.
 $dx = -dt$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ ise } t = \frac{\pi}{2}, x = \pi \text{ ise } t = 0$$

$$\sin(\pi - t) = \sin t$$

$$\cos(\pi - t) = -\cos t$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin t - \cos t).(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \cos t).dt$$